СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Э.А. Айрян[1], **А.Д. Егоров**[2], **Д.С. Кулябов**[1,3], **В.Б. Малютин**[2], **Л.А. Севастьянов**[1,3]

[1] Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Россия
[2] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
[3] Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ayrjan@jinr.ru, egorov@im.bas-net.by, yamadharma@gmail.com, malyutin@im.bas-net.by, leonid.sevast@gmail.com

Существует большое число математических моделей в естествознании, приводящих к стохастическим дифференциальным уравнениям (СДУ)

$$dx(t) = f(x,t)\,dt + g(x,t)\,dw(t) \tag{1}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $w(t)$ — винеровский процесс.

Описание с помощью СДУ моделей взаимодействующих популяций, таких как «хищник — жертва», симбиоз, конкуренция и их модификации рассмотрены в [1, 2].

Во многих приложениях часто требуется найти точное выражение или аппроксимацию функции плотности вероятности перехода (ФПВП) для стохастической переменной $x(t)$, моментов для ФПВП, математического ожидания функции от решения уравнения (1) и других величин. Для вычисления этих величин можно использовать методы решения стохастических дифференциальных уравнений [3, 4], уравнения Фоккера — Планка и численные методы решения этих уравнений [5]. Для этих целей можно также использовать метод функционального интегрирования.

В данной работе рассматривается представление ФПВП через функциональный интеграл с помощью техники Onsager — Machlup функционалов [5–8]. Рассматривается также метод приближенного вычисления функциональных интегралов, основанный на использовании разложения действия относительно классической траектории.

В общем случае мы не можем найти ФПВП на малом промежутке времени Δt соответствующую произвольному стохастическому дифференциальному уравнению. Однако можно найти выражение для ФПВП на малом промежутке времени Δt, которое верно с точностью до слагаемых имеющих относительно Δt порядок выше первого. Это выражение для уравнения (1) в случае схемы Ито и функций независящих от времени имеет вид [8]

$$p(x, t+\Delta t, y, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi g^2(y)\Delta t}} \exp\left\{ -\frac{(x - y - (f(y) - \frac{1}{2}g^{'}(y)g(y))\Delta t)^2}{2g^2(y)\Delta t} \right\}. \tag{2}$$

Используя выражение (2) и переходя к формуле с постоянным коэффициентом при $\dot{x}(\tau)^2$ можно записать ФПВП в виде

$$p(x, t, x_0, t_0) = Z[0] = \frac{1}{g(\varphi(y))}\bar{Z}[0],$$

$$\bar{Z}[0] = \int D[y] \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \left(\dot{y}(\tau) - \frac{f(\varphi(y(\tau))) - \frac{1}{2}g^{'}(\varphi(y(\tau)))g(\varphi(y(\tau)))}{g(\varphi(y(\tau)))} \right)^2 d\tau \right\}, \tag{3}$$

$$D[y] = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}, \quad \frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{g(y)}, \quad G(\varphi(y)) = y.$$

Выражение $D[y]$ формально расходится и имеет смысл только вместе с экспонентой под знаком интеграла в (3), а строго математически функциональный интеграл в правой части равенства (3) определяется как предел интегралов конечной кратности. Функционал в показателе экспоненты в формуле (3) называется Onsager — Machlup функционал.

Функциональный интеграл в формуле (3) мы рассматриваем не как интеграл большой кратности с интегрированием по большому числу переменных. а как интеграл по функциям или траекториям удовлетворяющим условиям $y(t_0) = \varphi^{-1}(x_0)$, $y(t) = \varphi^{-1}(x)$. Для вычисления этих интегралов можно использовать методы разработанные в [9–11]. В данной работе рассматривается еще один метод вычисления функциональных интегралов, при котором выражение в показателе экспоненты в формуле (3) рассматривается как действие $S = \int_{t_0}^{t} L(\dot{y}, y, \tau)\, d\tau$, а $L(\dot{y}, y, \tau)$ рассматривается как лагранжиан системы. Используя принцип наименьшего действия [12] можно из всех возможных траекторий выделить классическую траекторию $y_{\text{кл}}$, для которой действие S принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Используя разложение действия S относительно классической траектории $y_{\text{кл}}$

$$S[y(\tau)] \approx S[y_{\text{кл}}(\tau)] + \frac{1}{2}\delta^2 S[y_{\text{кл}}(\tau)] = S[y_{\text{кл}}(\tau)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \delta y\, \Lambda \delta y\, d\tau.$$

где $y = y_{\text{кл}} + \delta y$, оператор Λ известен и получается при вычислении вариации второго порядка от действия S, вычисление интеграла (3) сводится к вычислению интеграла

$$\bar{Z}[0] \approx \int D[\delta y] \exp\left\{ - S[y_{\text{кл}}(\tau)] - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \delta y\, \Lambda \delta y\, d\tau \right\}. \tag{4}$$

Работа частично поддержана грантами РФФИ №14-01-00628, №15-07-08795, а также грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф14Д-002).

Литература

1. Кулябов Д. С., Демидова А. В. *Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяций* // Вестн. РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». 2012. № 3. С. 69–78.

2. Демидова А. В. *Уравнения динамики популяций в форме стохастических дифференциальных уравнений* // Вестн. РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». 2013. № 1. С. 67–76.

3. Kloeden P. E., Platen E. *Numerical solution of stochastic differential equations.* Springer-Verlag, 1992.

4. Кузнецов Д. Ф. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений.* С.-Петербург, 2001.

5. Risken H. *The Fokker — Planck equation. Methods of solution and applications.* Springer-Verlag, 1984.

6. Onsager L., Machlup S. // Phys. Rev. 1953. 91. P. 1505.

7. Langouche F., Roekaerts D., Tirapegui E. *Functional integration and semi-classical expansions.* D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, 1982.

8. Horacio S. Wio. *Application of path integration to stochastic process: an introduction.* World Scientific Publishing Company, 2013.

9. Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю. *Введение в теорию и приложения функционального интегрирования.* М.: Физматлит, 2006.

10. Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А. *Приближенные методы вычисления континуальных интегралов.* Мн.: Наука и техника, 1985.

11. Egorov A. D., Sobolevsky P. I. and Yanovich L. A. *Functional integrals: Approximate evaluation and applications.* Kluwer Acad. Publ., 1993.

12. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum mechanics and path integrals.* New York: McGraw-Hill, 1965.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В.В. Бобков

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
bobkov@bsu.by

В качестве примера локального начального приближения задачи Коши

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(t) = y, \quad t \leqslant x \leqslant t + \tau,$$

на шаге численного интегрирования $h \leqslant \tau$ используется линейная задача вида

$$y'(x) = Ay(x) + a(x), \quad y(t) = y,$$

где $A = f_u(t, y)$, $a(x) = f(t, y) - Ay = a$, либо $a(x) = a + (x - t) f_x(t, y)$.

Последующие уточнения приближенного решения и его производной строятся на основе соотношений

$$\varepsilon(x) = -\xi^*(x) + \int\limits_t^x [f(z, y(z) + \varepsilon(z)) - f(z, y(z))]\, dz, \quad \varepsilon'(x) = -r^*(x) + f(x, y(x) + \varepsilon(x)) - f(x, y(x)),$$

где $\varepsilon(x) = u(x) - y(x)$ $(u(t) = y(t))$, обратная интегральная невязка $\xi^*(x)$ имеет вид

$$\xi^*(x) = y(x) - y - \int\limits_t^x f(z, y(z))\, dz,$$

а соответствующая обратная дифференциальная невязка задается в форме

$$r^*(x) = Ay(x) + a(x) - f(x, y(x)).$$

Обсуждается проблема плохой обусловленности матрицы A, а также случай ее вырожденности. Рассматриваемый подход распространяется на общий случай использования в качестве начального приближения любого одношагового метода численного решения начальной задачи.

Литература

1. Бобков В. В. *К вопросу численного моделирования начальных задач* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2013. № 3. С. 75–82.